

## Эффект Доплера

### 1. Введение

Эффект Доплера заключается в том, что частота колебаний, распространившихся на некоторое расстояние от их источника, отличается от частоты колебаний последнего; указанное изменение частоты зависит от относительной скорости движения источника и приёмника колебаний и не зависит от удалённости от источника. Эффект Доплера проявляется при распространении волн от вибрирующего поплавка на воде, звука, электромагнитных излучений и в некоторых других ситуациях. Это очень полезный эффект, широко и успешно используемый в системах радиосвязи, спутниковой навигации, спектрального анализа, медицинской диагностики и других. Его суть и математическая модель считаются достаточно простыми и ясными для понимания, чтобы преподавать их даже в школах. Так зачем же о нём писать ещё что-то? Дело в том, что эффект Доплера занимает особое положение в естествознании, поскольку связан с принципом относительности — фундаментальным в механике, хотя до сих пор вызывающим споры даже внутри лагеря нерелятивистов, не говоря уж о межлагерном противостоянии. Мне представляется, что посредством тщательного анализа данного эффекта можно лучше понять собственно принцип относительности, не выходя за рамки классической механики. Другими словами, эффект Доплера — экспериментальный факт, имеющий важное значение для обоснования классического принципа относительности.

Хотя эффект Доплера был обнаружен экспериментально ещё в середине XIX века, он мог быть сначала открыт исключительно, как говорят, “на кончике пера” и лишь затем проверен опытом. Его математическая модель очень проста: все основные формулы получаются из рассмотрения треугольников с использованием классических правил перехода между системами отсчёта. Так что, эффект Доплера оказывается прямым следствием принципа относительности. Простейшие формулы для частных случаев относительного движения были выведены самим Кристианом Доплером, а затем авторитетные физики (среди которых и Хендрик Лоренц) их несколько обобщили, и в таком виде они попали в учебники, курсы лекций различного уровня, а также в популярную литературу по физике. Однако, как это ни странно, указанные формулы оказались ошибочными.

Как может быть, что неверные формулы (назовём их каноническими) правильно описывают реальность в том смысле, что успешно предсказывают результаты соответствующих измерений? Простой ответ: да, формулы, вообще говоря, не точны, но их точности хватает в тех условиях, в которых они применяются — довольно обычное дело в науке. Этим объяснением можно было бы и удовлетвориться, если бы не следующее обстоятельство, повлекшее за собой грандиозные недоразумения в физике.

Дело в том, что канонические формулы отрицают так называемый поперечный эффект Доплера, а в специальной теории относительности (СТО) Альберта Эйнштейна ему есть место. Поскольку эффект действительно существует (он применяется, например, в ультразвуковой диагностике кровеносных сосудов), то Эйнштейн и релятивисты посчитали его экспериментальной

поддержкой своей теории относительности. Между тем, эффект Доплера вполне описывается и в классической теории, если к выводу канонических формул отнестись более тщательно, не допуская, так сказать, методических ошибок и поспешных пренебрежений малыми величинами. Исторически же случилось, что из-за математических приближений в классической физике эффект не был замечен, а потому и отрицался, а в релятивистской теории он не затерялся и был причислен к её важнейшим заслугам, а также к очень весомым эмпирическим аргументам в её пользу. Иначе говоря, классическая физика потеряла поперечный эффект Доплера из-за элементарной математической небрежности, а релятивистская физика гордится его предсказанием и приводит в качестве аргумента своей неспекулятивности. Добавим к этому ещё и то досадное упущение, что эффект ударной волны, появляющийся при скорости источника колебаний большей скорости распространения волны, формально не следует из классической модели эффекта Доплера, а описан отдельно стараниями Эрнста Маха; однако это всего лишь дефект традиционной классической модели, который можно легко исправить.

Наиболее тщательный и глубокий анализ классической математической модели эффекта Доплера, очистивший в итоге её от основных ошибок, выполнил Олег Акимов. По крайней мере мне не известны более ранние работы такого класса. Его результаты настолько меня убедили, что я было отказался от своей старой затеи самому разобраться с данной темой. Практически на все свои накопившиеся к тому времени вопросы я получил исчерпывающие, как мне тогда казалось, ответы. Однако чуть позднее я всё же заметил несколько вещей, разъяснение которых, как традиционное, так и принимаемое Акимовым, остаётся, с моей точки зрения, не вполне удовлетворительным. Поэтому я всё же решился предложить свой вариант изложения модели эффекта Доплера. В настоящей статье вы найдёте вывод основных формул, описывающих эффект Доплера в рамках классических (нерелятивистских) представлений об относительности движения. При этом вы увидите, что там, где есть эффект Доплера по частоте, может отсутствовать одноимённый эффект по длине волны.

## 2. Объект и его наблюдатель

Эффект Доплера проявляется при наблюдении объекта, состоящего из двух частей: источника и последовательности исходящих из него и движущихся некоторых элементов. В качестве последних могут быть, например, пули (источник — пулемёт) или фронты волны (источник — генератор электромагнитных колебаний или колебаний среды, например, воды, воздуха и др.). В математической модели эффекта Доплера от физической природы источника и элементов обычно отвлекаются и берут за основу одну из следующих чисто кинематических схем:

- 1) множество точек, возникающих из некоторого источника и разлетающихся в одном или во всех возможных направлениях; условно назовём точки пулями, а саму схему — пулевой;
- 2) множество окружностей, возникающих в одной плоскости около источника как центра, с увеличивающимися во времени радиусами; в трёхмерном пространстве вместо окружностей можно рассматривать сферы; условно назовём окружности или сферы фронтами распространяющейся волны, или просто волнами, а схему — волновой.

Для объяснения эффекта Доплера годится любая из указанных схем, хотя для прояснения некоторых деталей одна из них может оказаться более удобной, чем другая. Поэтому я не буду пренебрегать удобствами, если на то представится случай.

Теперь о параметрах модели. Источник генерирует элементы (пули или волны) с постоянной частотой  $f$  или, другими словами, с постоянным временным интервалом (периодом)  $T=1/f$ . Появившиеся из источника элементы движутся в пространстве равномерно и прямолинейно со скоростью  $c$ . В пулевой схеме очевидно, что такое равномерное и прямолинейное движение пуль. В волновой схеме имеется в виду равномерное увеличение радиуса каждого фронта волны, кругового в плоском случае и сферического в трёхмерном. Относительно чего со скоростью  $c$  движутся элементы? Возможны два варианта, о которых чуть позже. Элементы образуют в пространстве удлиняющуюся со временем последовательность с одинаковыми расстояниями между любыми двумя соседними элементами. Это расстояние и в пулевой, и волновой схемах будем для краткости называть одинаково — длиной волны и обозначать через  $\lambda$ . Наконец, источник элементов также движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$ . Относительно чего? Относительно некоторой системы отсчёта, которая считается неподвижной.

Итак, мы указали исходные данные, а в чём заключается задача? В определении частоты и длины волны элементов на некотором расстоянии от их источника в зависимости от скоростей движения.

Введение неподвижной системы отсчёта (НСО) при изучении движения чего либо — совершенно обычное дело и, как правило, если о ней говорят, то совсем немного. Однако при изучении эффекта Доплера ей следует уделить больше внимания ввиду того, что кроме движения многокомпонентного объекта (источника с элементами) обычно рассматривают ещё и движение наблюдателя — приёмника волн или пуль. Однако здесь мы сталкиваемся с некоторой методической трудностью, которую часто просто не желают замечать.

Наблюдатель какого-либо движения представляется посредством некоторой системы отсчёта, в которой фиксируется его положение и, если необходимо, угол зрения. Если мы хотим описать движение каких-то внешних объектов, то не должны искажать картину собственным движением. Поэтому мы и вводим НСО. НСО соответствует, так сказать, метанаблюдателю, в поле зрения которого находятся все объекты теории — источник и исходящие из него элементы, в любой момент времени и в любой точке пространства. Автор, создающий и излагающий научную теорию, всегда является метанаблюдателем. Термин “метанаблюдатель” используют ещё и для того, чтобы не возникало путаницы при введении другого наблюдателя — приёмника элементов, иногда называемого объектным наблюдателем, который может перемещаться. Дело в том, что эффект Доплера проявляется по-разному в трёх ситуациях: 1) при движении источника и покоящемся наблюдателе, 2) при движении наблюдателя и покоящемся источнике и 3) при движении их обоих. В настоящей статье мне не нужен объектный наблюдатель, введение которого вызывает, как мне кажется, лишь путаницу. У меня наблюдатель только один, он связан с некоторой, вообще говоря, произвольной НСО. Эффект *движения неподвижного наблюдателя* относительно объекта моделируется специальным определением *движения объекта* относительно НСО. Как это делается, мы увидим в подразделе 3.1.

### 3. Одномерная модель

Рассмотрим сначала простейшую модель эффекта Доплера, соответствующую так называемой пулевой схеме, которая сейчас выбрана лишь из соображений удобства: одномерный случай, в котором векторное сложение скоростей выражается через скалярное сложение их величин, то есть без применения тригонометрии. Напомню, что название схемы метафорическое и никак не связано с реальной стрельбой из пулемёта.

Пусть задана неподвижная одномерная система координат; источник движется относительно данной системы отсчёта с постоянной скоростью  $v$  параллельно оси координат в сторону увеличения их значений, и генерирует с постоянной частотой  $f$  пули, летящие также равномерно и прямолинейно и в том же направлении, что и их источник, но со скоростью  $c$ , относительно которой может быть в двух вариантах: 1) относительно источника и 2) относительно неподвижной системы отсчёта. Равномерное и прямолинейное движение называют ещё инерциальным.

В первом варианте пули летят со скоростью  $c$  относительно источника, а сам источник движется со скоростью  $v$  относительно НСО. Во втором варианте пули и источник движутся относительно НСО со скоростями  $c$  и  $v$  соответственно.

Очевидно, оба варианта сходятся к одному в частном случае, когда источник неподвижен ( $v = 0$ ) и пули летят с одинаковой скоростью  $c$  и относительно источника, и относительно НСО. На этом тривиальном варианте остановимся ненадолго. В точке расположения источника частота  $f$  “стрельбы” известна по определению. А какова частота прибытия пуль на некотором удалении от источника? Возьмём произвольную точку на пути полёта пуль. Пусть в какой-то момент в эту точку прибыла пуля, тогда следующая в очереди прилетит в эту точку спустя период времени  $T = 1/f$ , и, следовательно, частота прибытия пуль равна  $f$ , то есть такая же, что и в точке положения источника. Расстояние между любыми соседними в очереди пулями (длина волны)  $\lambda = cT = c/f$ . Обратите внимание на то, что при изменении величины  $c$  скорости полёта пуль пропорционально изменяется длина волны  $\lambda$ , а частота  $f$  остаётся неизменной. В рассматриваемом случае, когда источник неподвижен, эффекта Доплера нет.

Теперь перейдём к двум вариантам, в которых источник движется ( $v > 0$ ) относительно неподвижной системы отсчёта. Различие вариантов состоит лишь в определении, относительно чего задана скорость  $c$  полёта пуль. Напомню, пули летят в ту же сторону, что и источник; для противоположного движения следует просто заменить знак перед  $c$  на противоположный. Нас интересует частота  $f'$  прибытия пуль в точку, лежащую на пути их полёта на произвольном расстоянии от источника; частота  $f'$  определяется относительно НСО. Далее штрихованные величины будут соответствовать НСО.

#### 3.1. Вариант 1

В рассматриваемом первом варианте пули движутся со скоростью  $c$  относительно источника, который сам движется со скоростью  $v$  относительно НСО. Таким образом, источник и пули движутся относительно НСО со скоростями  $v$  и  $c + v$  соответственно. Это тот случай, когда скорость движения пуль относительно источника не зависит от того, движется последний или покоится.

Идея получения формулы для  $f'$  состоит в том, что расстояния между соседними в очереди пулями (длина волны) в системе отсчёта, связанной с источником, и в НСО равны. Расстояние во всех системах отсчёта одно и то же, то есть инвариантно относительно систем отсчёта. Нам остаётся приравнять друг другу два соответствующих выражения и далее решить равенство относительно  $f'$ .

В системе отсчёта, связанной с источником, длина волны равна  $cT$  (или  $c/f$ ) — показывается так же, как и в тривиальном случае неподвижного источника ( $v = 0$ ). В НСО появившаяся из источника пуля пролетит расстояние  $(c+v)T$ , а источник за это же время  $T$  переместится на расстояние  $vT$  и выпустит следующую пулю. Расстояние между первой и второй пулями составит разность указанных величин:  $(c + v)T - cv = cT$ . То же самое для второй и третьей пуль и так далее. Таким образом, расстояние между соседними пулями (длина волны) инвариантно относительно обеих систем отсчёта. Это важный отправной момент. Далее всё просто.

Пуля, двигаясь в НСО со скоростью  $c + v$ , покрывает расстояние  $cT$ , равное длине волны, за некоторое искомое время  $T'$ . Поскольку длина волны не зависит от системы отсчёта, то составляем равенство

$$(c + v)T' = cT,$$

из которого в результате элементарных преобразований получаем давно известную формулу для частоты пуль в НСО:

$$f' = f(1 + v/c) \quad (3.1)$$

Если  $v$  отлична от нуля, то  $f'$  отлична от  $f$ , в чём и заключается эффект Доплера. Если источник и пули движутся в противоположные стороны, то в формуле (1) знак "+" следует поменять на "-". Разумеется, данная формула выполняется во всех точках, которые пули посещают.

Что же касается до длины волны  $\lambda'$ , то она равна  $cT = c/f = (c+v)/f' = \lambda$ , то есть не зависит от  $v/c$  и, следовательно, эффект Доплера для длины волны в рассматриваемом случае отсутствует.

Теперь я должен сделать пару важных, на мой взгляд, замечаний, особенно для тех, кто уже знаком с формулами Доплера.

Во-первых, формула (3.1) обычно приводится в справочниках для случая, когда движется наблюдатель, а источник покоится; в нашем же варианте явно указано, что движется источник, а наблюдатель неподвижен (связан с НСО). Дело заключается в особенности исходного задания относительных движений (см. выше), которые позволили мне отказаться от явного использования объектного наблюдателя, тем более движущегося, но вместе с тем всё же смоделировать эффект движения наблюдателя. Нетрудно заметить, что данный вариант *эквивалентен* ситуации, в которой источник неподвижен, а НСО (связанная с наблюдателем), наоборот, движется навстречу к нему со скоростью  $v$ . Однако фраза "неподвижная система отсчёта движется ..." кажется по меньшей мере неоднозначной, если вообще не некорректной. Таким образом, теперь мы должны понимать, что имеем в виду, когда говорим "наблюдатель движется", и можем *называть* первый вариант так: "наблюдатель движется, а источник покоится". И далее, говоря о подвижном наблюдателе, мы будем иметь в виду схему движения первого варианта: в НСО скорость пули есть *сумма* скорости источника и скорости пули относительно этого источника. Обратите внимание, что мы рассмотрели исключительно кинематическую схему, то есть не зависящую ни от каких, так сказать, физических обстоятельств или соображений.

Вместе с тем, данному варианту в своей исходной формулировке можно придать и собственную, так сказать, физическую интерпретацию. Она подходит, с моей точки зрения, к системам, в которых происходит передача импульса от одних элементов к другим. Например, стрельба из реального пулемёта или запуск космического аппарата. Так, пуля, выпущенная из пулемёта, приближающегося к неподвижной цели, настигнет последнюю с большей скоростью, чем пуля из неподвижного и, тем более, из удаляющегося от цели пулемёта. Искусственные спутники Земли запускают на орбиты с прямым наклоном, то есть по ходу её вращения, чтобы с выгодой использовать скорость этого вращения и в конечном счёте снизить энергозатраты на вывод спутника на орбиту. Наконец, если вы в мчащемся поезде уроните некий предмет, высунув руку из окна вагона и разжав пальцы, то последний упадёт на землю не в той точке, над которой он начал падать, а несколько впереди по ходу движения поезда: движение вертикального падения суммируется с горизонтальным движением. Признаюсь, именно на данную интерпретацию я опирался, когда вводил в рассмотрение формальную схему первого варианта. То, что этот вариант кинематически эквивалентен ситуации “наблюдатель движется, а источник покоится”, я заметил позднее, но это лишь курьёз психологического порядка.

Однако есть и системы, в которых нет передачи импульса от одних элементов к другим. По-видимому, к таковым относятся электромагнитные волны (в том числе свет), для кинематики которых при движущемся источнике подходит второй вариант, который нам ещё только предстоит рассмотреть. Но и первый вариант подходит к электромагнитным волнам при неподвижном источнике и движущемся наблюдателе.

Во-вторых, мы видели, что в варианте “наблюдатель движется, а источник покоится” эффект Доплера состоит в изменении только частоты (периода), а длина волны остается постоянной и равной  $c/f$  (или  $cT$ ), то есть определяется только скоростью пуля относительно источника и частотой “стрельбы”. Однако во многих публикациях на данную тему утверждается, что эффект Доплера выражается взаимно-однозначно через изменение как частоты, так и длины волны. Насколько мне известно, данное утверждение делается везде. Последнее является, на мой взгляд, ошибкой, а потому я обращаю на него особое внимание! Обычно считают само собой разумеющимся, что коль скоро эффект Доплера есть для частоты, то он должен быть и для длины волны; при этом наблюдаемую длину волны  $\lambda'$  вычисляют как  $c/f'$ , вместо правильной формулы  $(c+v)/f'$ , дающей в результате арифметических преобразований  $c/f$  — длину волны неподвижного источника. Ошибка остаётся незамеченной, возможно, благодаря типичному пояснению на примере вроде следующего: “Представьте себе наблюдателя, плывущего в лодке навстречу волнам, распространяющимся вокруг вибрирующего поплавка. Понятно, что длина волны покажется ему короче, чем в случае неподвижной лодки, поскольку волна набегаёт на него с большей скоростью (или поскольку лодка набегаёт на встречную волну)”. Здесь, похоже, срабатывает психологический фактор, внушающий разуму, что наша интуиция верна. Быть может, кто-то считает, что измерение длины чего-либо во время движения даёт результаты, отличные от полученных в состоянии покоя? Если да, то, видимо, он пользуется негодными методами, или привержен релятивизму в духе Эйнштейна. Далее я приведу пример использования хорошего метода. Возможно, есть и другие причины ошибки. Подозреваю, что происходит путаница между первым и вторым вариантами. Как бы то ни было, в ошибочных рассмотрении ситуации “наблюдатель движется, а источник покоится” инвариантом в различных системах отсчёта (НСО и системе, связанной с источником) оказывается скорость с движения пуля (волн), а не расстояние между ними (длина волны). Так, в ошибочном варианте длина волны  $\lambda' = \lambda / (1 + v/c)$ , и получается, что  $\lambda'f' = \lambda f = c$ , хотя правильный результат —  $c + v$ , который получается как  $\lambda'f'$ . Вспомним, что

штрихованные величины у нас определяются для НСО (мета- и единственного наблюдателя). Добавлю к сказанному, что в данном варианте, в отличие от второго, не удаётся нарисовать чертёж, который бы явно показывал, что длина волны отлична от той, которая имеет место при неподвижном источнике. Теперь я приведу пояснительный пример.

Представьте, что вы стоите около железнодорожного полотна, по которому мимо вас мчится состав из вагонов одинаковой длины. Вы палкой, например, скребёте по бортам проходящих мимо вагонов. Поскольку между вагонами есть "промежуток малый", вы будете ощущать периодическое изменение характера скрежета и величины сопротивления. Иначе говоря, вы можете измерять частоту следования вагонов. Если при этом вы побежите навстречу составу, то, очевидно (впрочем, можно и проверить на опыте), частота увеличится. А если вы побежите по ходу движения поезда, то частота уменьшится.

А как измерить длину движущихся вагонов? Разумеется, линейкой. Но тогда кому-то может показаться, что пока мы будем снимать отсчёты начала и конца вагона относительно линейки, ситуация успеет измениться и, следовательно, результат измерения длины вагона окажется отличным от длины, измеренной той же линейкой, но когда поезд стоял на месте. Если так, то это и есть пример использования негодных методов измерения длины. А вот пример хорошего метода: берём рулетку с достаточно длинной гибкой линейкой, зацепляем один из её концов за начало проходящего мимо вагона и, следя за натяжением разматывающейся линейки и её параллельностью с продольной кромкой вагона, снимаем отсчёт, как только с нами поравняется конец вагона. А изменится ли результат измерений, если мы будем не стоять на месте, а бежать вдоль состава? Разумеется, нет. Так что, в данном случае движение наблюдателя приводит к эффекту Доплера для частоты элементов (вагонов), но не для расстояния между ними.

### 3.2. Вариант 2

Во втором варианте источник и пули движутся относительно НСО со скоростями  $v$  и  $c$  соответственно. Это как раз тот случай, когда скорость движения пуль относительно неподвижной системы отсчёта (НСО) не зависит от скорости движения источника. Как уже отмечалось, НСО у нас связана с наблюдателем, поэтому данный вариант можно назвать так: "источник движется, а наблюдатель покоится."

Замечу попутно, что данный вариант соответствует постулату о постоянстве скорости света, сформулированному Эйнштейном в его статье 1905г. "К электродинамике движущихся тел": "каждый луч света движется в покоящейся системе координат с определенной скоростью  $V$ , независимо от того, испускается ли этот луч света покоящимся или движущимся телом". В таком виде постулат принимается и классической физикой. Однако в той же статье, но чуть ниже, Эйнштейн "протащил", то есть добавил, хотя и не в виде явной декларации, а как бы само собой разумеющееся, что луч света движется с той же скоростью и в любой инерциально движущейся системе координат. Возможно, это просто по небрежности незамеченная непоследовательность первого изложения специальной теории относительности, но она повлекла за собой очень даже заметные последствия. В дальнейшем, как известно, инвариантность скорости света относительно всех инерциальных систем отсчёта постулировалась явно. Однако сейчас не об этом.

С физической, так сказать, точки зрения данный вариант интерпретируется как система, в которой импульс от источника не передаётся вылетающим из него частицам, как если бы частицы не было внутри источника, а её появление снаружи понималось как “рождение”. Как бы то ни было, нам сейчас важна лишь кинематическая схема.

Итак, относительно источника пули летят со скоростью  $c - v$ , а относительно НСО — со скоростью  $c$ . Длина волны (расстояние между двумя соседними пулями) в системе отсчёта, связанной с источником, равна  $(c - v)T$ . Эта же величина в НСО равна  $cT'$ . Длина волны — инвариант относительно данных систем отсчёта, поэтому из равенства  $cT' = (c - v)T$  получаем  $T' = (1 - v/c)T$ , или с учётом  $T = 1/f$  и  $T' = 1/f'$  выводим формулу для частоты:

$$f' = f/(1 - v/c) \quad (3.2)$$

Если  $v$  отлична от нуля, то  $f'$  отлична от  $f$ , в чём и заключается эффект Доплера. Если источник и пули движутся в противоположные стороны, то в формуле (3.2) знак “+” следует поменять на “−”. Разумеется, данная формула выполняется во всех точках, которые пули посещают.

Что же касается до длины волны  $\lambda'$ , то её величину можно определить либо в системе отсчёта, связанной с источником, либо в НСО: она инвариантна относительно обеих. В самом деле, в первой системе  $\lambda'$  равна  $(c - v)T = cT(1 - v/c) = \lambda(1 - v/c)$ , а во второй —  $cT' = c/f' = (c/f)(1 - v/c) = \lambda(1 - v/c)$ . Как видно,  $\lambda'$  зависит от  $v/c$  и, следовательно, эффект Доплера для длины волны в рассматриваемом варианте при  $v \neq 0$  есть. Таким образом, данный вариант отличается от первого (источник покоится, а наблюдатель движется) тем, что эффект Доплера проявляется не только для частоты, но и для длины волны.

При  $|v/c| = 1$  частота пуль  $f'$  становится бесконечно большой, а расстояние между ними — бесконечно малым. При  $|v/c| > 1$  частота и длина волны могут стать отрицательными, но это особый случай ударной волны, который будет рассмотрен в подразделе 4.3. При  $|v/c| < 1$  формулы (3.1) и (3.2) дают результаты, одинаковые с точностью до  $f(v/c)^2$ :

$$f(1 + \beta) - \frac{f}{1 - \beta} = \frac{f\beta^2}{1 - \beta} = f\beta^2(1 + \beta + \beta^2 + \dots) \approx f\beta^2, \quad \text{где } \beta = \frac{v}{c}$$

### 3.3. Вариант 3: когда движутся и источник, и наблюдатель

В предыдущих подразделах мы рассмотрели два варианта относительного движения, которые были названы следующим образом:

1) источник покоится, а наблюдатель движется;

2) источник движется, а наблюдатель покоится.

Выбор названий был мотивирован желанием указать на практически важные ситуации, которые более или менее удачно моделируются соответствующими вариантами относительного движения, а также тем, что именно такие названия используются в учебной и популярной литературе на данную тему.

Напомню, движение наблюдателя в первом варианте рассматривалось не как движение некоей точки относительно неподвижного источника, а как движение источника относительно НСО, скорость которого прибавлялась к скорости пуль. Это позволило нам во всех случаях представить наблюдателя неподвижной системой отсчёта (НСО). Таким образом, наблюдатель это неподвижная точка в НСО, а движущийся (объектный) наблюдатель просто моделируется как соответствующее движение источника и пуль, определённое специальным образом (см. описание первого варианта, подразд. 3.1). Иначе говоря, мы всё приводим к схеме метанаблюдателя, представленного посредством НСО, вытесняя из теории *объектного* наблюдателя. Как и ранее, говоря просто о наблюдателе, мы имеем в виду *объектного* наблюдателя. Каким образом объектный наблюдатель вытесняется метанаблюдателем? Очевидно, простым переходом от одной системы отсчёта к другой. А систем отсчёта у нас две: 1) связанная с источником и 2) неподвижная (НСО).

Комбинация двух указанных вариантов даёт формулу для эффекта Доплера в ситуации, когда движутся одновременно и источник пуль, и *объектный* наблюдатель (третий вариант). На первый взгляд, данная ситуация является весьма запутанной, по крайней мере наша интуиция пространства-времени испытывает некоторые затруднения. Это один из тех случаев, когда нам может помочь разум.

Пусть  $v_1$  — скорость движения объектного наблюдателя навстречу источнику (вариант 1),  $v_2$  — скорость источника (вариант 2),  $c$  — скорость пуль, определённая, так или иначе, в соответствии с одним из двух вариантов. В следующей таблице приведены длины волны (расстояния между соседними пулями) для двух основных вариантов и третьего, комбинированного, варианта, соответствующего диагонали таблицы, помеченной стрелкой.

| Система отсчёта        | Вариант 1      | Вариант 2     |
|------------------------|----------------|---------------|
| связанная с источником | $c/f$          | $(c - v_2)/f$ |
| НСО                    | $(c + v_1)/f'$ | $c/f'$        |

Вариант 3

Выражения для длин волн разные, но их значения внутри каждого из вариантов одинаковые. Напомню, данное обстоятельство как раз и использовалось для вывода формул эффекта Доплера в первых двух вариантах. Остановимся теперь на комбинированном варианте. Итак, в данном варианте участвуют, кроме скорости пуль  $c$ , две скорости —  $v_1$  и  $v_2$ , но  $v_1$  фигурирует только в выражении для длины волны в НСО, а  $v_2$  — только в выражении длины волны в системе отсчёта, связанной с источником. Иными словами, скорость  $v_1$  движения объектного наблюдателя влияет на скорость пуль относительно НСО, но не влияет на скорость пуль относительно источника; с другой стороны, скорость  $v_2$  движения источника никак не влияет на скорость пуль относительно НСО; вместе с тем, длина волны не зависит от того, измеряется она в НСО или же системе отсчёта, связанной с источником. Данные обстоятельства позволяют составить уравнение

$$(c + v_1)/f' = (c - v_2)/f,$$

из которого получается известная формула эффекта Доплера для частоты, измеренной в НСО:

$$f' = f(1 + v_1/c)/(1 - v_2/c)$$

Напомню, что данная формула соответствует ситуации, когда источник и объектный наблюдатель движутся навстречу друг другу, сближаясь. Другие варианты (например, движутся в одну сторону,

или в противоположные стороны, удаляясь друг от друга) получаются из данного путём соответствующей замены знака перед  $v_1/c$  и  $v_2/c$ .

Формально данный вариант моделируется *суперпозицией* формул для первого и второго вариантов: надо в одну формулу вместо  $f$  подставить правую часть другой формулы; при этом не важно, какая из формул берётся за основу, а какая подставляется.

На длину волны  $\lambda'$  движение наблюдателя не влияет, поэтому

$$\lambda' = \lambda(1 - v_2/c)$$

Заметим попутно, что четвёртый вариант, отображаемый противоположной диагональю приведённой таблицы, соответствует ситуации с неподвижными источником и объектным наблюдателем ( $v_1 = v_2 = 0$ ), в которой эффект Доплера отсутствует.

#### 4. Двумерная модель

Теперь перейдём к более общей, двумерной (плоской) модели, которая позволит нам рассмотреть эффект Доплера под произвольным углом, а не только под 0 или 180 градусов как в одномерной модели, описанной в разделе 3. Переход к ещё более общей трёхмерной модели — дело техники, а потому здесь не рассматривается. В двумерной модели допускается, что между направлениями движений источника и испускаемых им элементов (например, пуль) может быть любой угол. Однако каким бы он ни был, нас интересует, вообще говоря, другой угол — угол видимости источника. Точнее, нас интересует эффект Доплера в любой точке плоскости, из которой источник виден под некоторым углом, называемым углом видимости источника.

Мы могли бы рассмотреть источник, испускающий пули во всех возможных направлениях. Однако более удобной, на мой взгляд, представляется волновая схема. В этой схеме источник с частотой  $f$  генерирует около себя круговую волну. Окружность (фронт волны) с центром в месте положения источника в момент своего возникновения имеет нулевой радиус, который затем увеличивается с некоторой постоянной скоростью: фронт волны распространяется. Скорость увеличения радиуса можно определить двояко подобно тому, как это мы делали для скорости полёта пуль в одномерной модели, и рассмотреть соответственно два основных варианта: 1) источник покоится, а наблюдатель движется и 2) источник движется, а наблюдатель покоится.

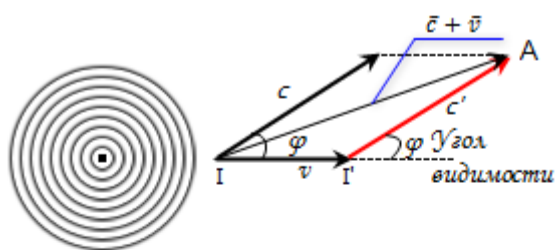
Наблюдатель, как и в предыдущей, одномерной, модели, связан с неподвижной системой отсчёта (НСО), но теперь он может находиться не только на прямой движения источника, но и где-то в стороне от неё. Если взять произвольную точку плоскости, в которой движутся источник и генерируемые им волны, то из этой точки, называемой точкой наблюдения, источник виден под некоторым углом, называемым углом видимости. Точнее, угол видимости это угол между направлением из точки наблюдения на источник и направлением движения источника.

В двумерной и трёхмерной моделях способ вывода формул, выражающих эффект Доплера, в принципе такой же, как и при одномерной модели. Особенность состоит в том, что теперь мы должны манипулировать скоростями как *векторными* величинами, а не скалярными. Известные ошибки в выводах формул для эффекта Доплера были обусловлены главным образом некорректными действиями с векторами, на что и обратил внимание О. Акимов.

#### 4.1. Вариант 1: источник покоится, а наблюдатель движется

В первом варианте все волновые фронты представляются концентрическими окружностями с центром в их источнике. Радиусы этих окружностей равномерно увеличиваются со скоростью  $c$ , а их общий центр движется равномерно и прямолинейно со скоростью  $v$  относительно НСО (рис. 1). Данный вариант кинематически эквивалентен ситуации, в которой источник неподвижен, а движется наблюдатель, но в противоположном направлении.

Рассмотрим движение произвольной точки какого-нибудь фронта волны относительно НСО. Очевидно, оно происходит со скоростью, равной векторной сумме векторов  $c$  и  $v$ , которая полностью определяется углом (обозначим его буквой  $\phi$ ) между ними, а также их модулями. Вместе с тем, в данном варианте угол  $\phi$  оказывается равным углу видимости источника из



**Рис.1** Источник покоится, наблюдатель движется

$$\vec{c}' = \vec{c}$$

$$|\vec{c} + \vec{v}| = c\sqrt{1 + 2\beta\cos\phi + \beta^2}, \text{ где } \beta = \frac{v}{c}$$

$$f' = \frac{|\vec{c} + \vec{v}|}{c} f; \quad (4.1)$$

$$\lambda' = \lambda$$

При  $\phi = \pi/2$  (поперечный эффект)  $f' = f\sqrt{1 + \beta^2}$ ;

$$\lambda' = \lambda$$

любой точки на луче, проходящем через источник в направлении вектора  $c$ . Нас интересует эффект Доплера в любой точке на указанном луче, или, иначе говоря, при заданном угле видимости источника.

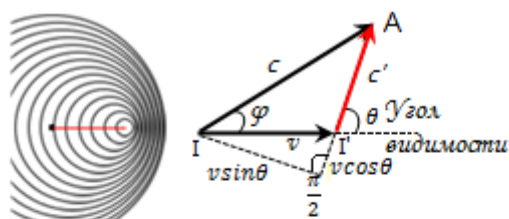
Вывод формулы (4.1) для эффекта Доплера основан на той же логике, что и для одномерной модели. При этом эффект имеет место для частоты  $f'$ , но не для длины волны  $\lambda'$ . Очевидно, что при углах видимости источника 0 и 180 градусов мы получаем ту же формулу, что и для одномерного случая. Нетрудно заметить, что так называемый поперечный эффект для частоты, соответствующий углу видимости 90 градусов, также описывается формулой (4.1).

Как заметил О. Акимов, причина потери поперечного эффекта Доплера в классической

механике, по-видимому, обусловлена тем, что вместо использования векторной суммы векторов  $c$  и  $v$  применялось скалярное сложение скорости  $c$  и проекции на неё вектора  $v$ :  $c + v\cos\phi$ . В результате получалась формула, отличная от (4.1). При малых значениях отношения  $v/c$  она давала достаточно точные результаты, если угол видимости источника (или угол между векторами  $c$  и  $v$ ) был достаточно острым или, наоборот, тупым. Для угла 90 градусов формула указывала на отсутствие эффекта Доплера потому, что была принципиально неверна.

#### 4.2. Вариант 2: источник движется, а наблюдатель покоится

Во втором варианте радиусы круговых фронтов волны равномерно увеличиваются со скоростью  $c$ , но их центры неподвижны относительно НСО, они совпадают с точкой расположения источника в момент возникновения фронта. Если источник движется со скоростью  $v > 0$ , то совокупность



**Рис.2** Источник движется, наблюдатель покоится

$$\vec{c'} = \vec{c} - \vec{v}$$

$$\begin{aligned} c' &= c \left( \sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi} + \beta^2 \right) = \\ &= c \left( \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} - \beta \cos \theta \right), \text{ где } \beta = \frac{v}{c} \\ f' &= \frac{c}{c'} f; \quad (4.2) \\ \lambda' &= c' T = \frac{c'}{f} \end{aligned}$$

При  $\theta = \pi/2$  (поперечный эффект)  $f' = \frac{f}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ ;  
 $\lambda' = \lambda \sqrt{1 - \beta^2}$ .

фронтов волны будет представляться неконцентрическими окружностями и поэтому эффект Доплера заметен, если сделать снимок волны (рис.2). Он заметен на рисунке для длины волны и вычисляется для частоты.

Как и в первом варианте, введём угол  $\varphi$  между вектором  $c$  скорости некоторой точки фронта волны и вектором  $v$  скорости источника. Однако в данном варианте, в отличие от первого, этот угол не совпадает с углом видимости источника, который здесь обозначен как  $\theta$  (рис. 2). В самом деле, пусть  $A$  — точка наблюдения, из которой в некоторый момент времени источник  $I$  виден под углом  $\varphi$ ; в этот же момент создаётся круговой фронт волны, радиус которого увеличивается с

постоянной скоростью  $c$ , а центр остаётся неподвижным относительно НСО, хотя источник перемещается. Когда данный фронт достигнет точки наблюдения, источник переместится в некоторое положение  $I'$  и будет виден уже под другим углом  $\theta$ . Очевидно, углы  $\varphi$  и  $\theta$  взаимнооднозначно связаны друг с другом и поэтому формула для эффекта Доплера может быть выражена через любой из них. Для малых значений отношения  $v/c$  указанные углы очень близки. Тем не менее, формулы эффекта Доплера, выраженные через эти углы, оказываются разными.

Логика вывода формул (4.2) для эффекта Доплера такая же, как и в случае одномерной модели, но при этом используется векторная диаграмма, показанная на рис. 2. Впервые данную формулу получил О. Акимов. Эффект имеет место как для частоты, так и для длины волны. При углах видимости  $\theta$ , равных 0 и 180 градусам, формулы принимают вид, соответствующий одномерной модели. При угле видимости 90 градусов формулы описывают поперечный эффект Доплера.

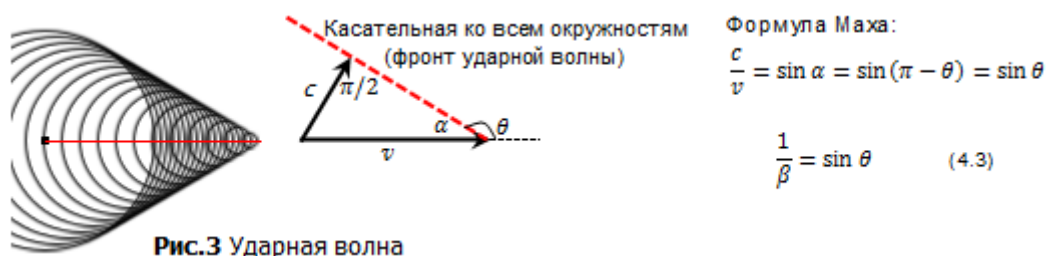
### 4.3. Ударная волна

Общим местом в рассмотренных ранее ситуациях является то, что скорость  $v$  источника или наблюдателя не превышает скорости  $c$  распространения волн. Теперь рассмотрим вариант, когда наблюдатель покоится, а источник движется со скоростью  $v > c$ , то есть когда волна не догоняет свой источник. В этом случае формула (4.2) сохраняет смысл, если подкоренное выражение в формуле для  $c'$ , входящей в выражение для  $f'$  и  $\lambda'$ , неотрицательно. Но это возможно, если синус угла видимости источника не превышает  $c/v$  (т.е.  $1/\beta \geq \sin \theta$ , где  $\beta = v/c$ ). Граничный случай соответствует равенству. Таким образом, все круговые фронты в плоской модели должны располагаться внутри двух лучей, сходящихся в точке положения источника, а в трёхмерном варианте — внутри конуса, вершина которого совпадает с источником.

Указанные лучи являются касательными ко всем круговым фронтам волны и изображают фронт так называемой ударной волны. При этом угол видимости источника  $\theta$  может быть только тупым, а половина угла между вектором  $v$  скорости источника и фронтом ударной волны  $\alpha$  равна

дополнению угла видимости до 180 градусов. Однако синусы указанных углов равны. Итак, мы только что из общей формулы для эффекта Доплера вывели, как частный случай, формулу Маха (4.3) для ударной волны.

На рис.3 показаны картина волнового процесса с образованием ударной волны и чертёж, с помощью которого (точнее, с использованием теоремы Пифагора) легко выводится известная формула Маха, связывающая отношение  $v/c \geq 1$ , с углом фронта ударной волны, образуемом с направлением движения источника.



#### Ссылки по теме:

1. В.В. Дунаев. Анимационные иллюстрации эффекта Доплера — <http://dunaevv1.narod.ru/other/dopler.htm>
2. В.В. Дунаев. Замкнутые системы и системы отсчёта — <http://www.proza.ru/2013/09/17/1468>
3. О.Е. Акимов. Лекция 4. Эффект Доплера — <http://sceptic-ratio.narod.ru/fi/es4.htm>
4. А. Эйнштейн. К электродинамике движущихся тел — <http://interstellar-flight.ru/03/kedt.pdf>