

Вадим Дунаев

Эффект Доплера — формулы

Эффект Доплера заключается в том, что частота колебаний, распространившихся на некоторое расстояние от их источника, отличается от частоты колебаний последнего в зависимости от скорости движения источника и приёмника колебаний.

Эффект Доплера был открыт Кристианом Допплером в середине XIX века применительно к звуку, хотя его можно было обнаружить ещё в конце XVII века в экспериментах Олафа Рёмера применительно к свету. Как выяснилось позднее, эффект проявляется при распространении колебаний различной природы. Наибольшее практическое применение эффект Доплера нашёл в системах радиосвязи, радионавигации, спектрального анализа и медицинской диагностики (доплерография кровеносных сосудов). Эффект широко описан и в научной, и в популярной литературе. Объяснить его очень просто, однако смущает неоднозначность его формульного выражения. Об этом свидетельствует обилие статей различного уровня, в том числе и современных, авторы которых критикуют подходы друг друга к формальному описанию указанного эффекта. Прежде всего следует упомянуть так называемый поперечный эффект Доплера, который описывается релятивистской теорией (теорией относительности), но якобы не замечен классической. Кроме того, в различных статьях похожие формулы, относящиеся к одинаковым ситуациям, нередко всё же отличаются знаками при величинах и даже противоположным содержанием числителей и знаменателей. Например, в статье Л.А. Победоносцева, Я.М. Крамаровского и др. (1989г.) об экспериментальной проверке эффекта Доплера приводится расчётная релятивистская формула, которая отличается знаком от аналогичной формулы из справочника по физике Б. М. Яворского и др. (1971, 2006 г.г.). А пример “перевёртыша” формулы можно найти в статье У.И.Франкфурта и А.М. Френка (1972г.). Это, конечно, серьёзный повод к тому, чтобы разобраться с основаниями теории, что и попытался сделать О.Е. Акимов (2001г.). Его работа не дала мне исчерпывающих объяснений, но зато вызвала интерес к теме, и я решил провести собственное исследование, увенчавшееся, как мне представляется, обнаружением некоторых ошибок, а также их причин.

К основным причинам разнобоя в формулах, на мой взгляд, относятся:

- 1) плохо контролируемое упрощение формул, оправданно допускаемое при малых скоростях источника колебаний и наблюдателя, но применяемое за границами допущений;
- 2) неоднозначность в интерпретации входящих в формулы величин, например, угла между линией наблюдения и направлением движения источника колебаний; указанный угол может иметь два значения, отличающихся друг от друга на 180 градусов, что и приводит к разнобою в знаках (плюс-минус) в формулах.

1. Общая модель

Колебания с частотой f (периодом $T = 1/f$), генерируемые источником, распространяются в окружающем его однородном и изотропном пространстве с некоторой постоянной скоростью в виде волн. Волну можно представить в виде сферы, радиус которой увеличивается с постоянной скоростью, а центр располагается в том месте, где находился источник в момент возникновения волны. Во всех точках одной сферы колебания имеют одинаковые фазы. Очевидно, если

зафиксировать для рассмотрения какую-нибудь одну фазу, то вся картина распространения волн примет дискретный характер — набор сфер, соответствующих данной фазе колебаний. Например, при наблюдении волн на воде мы обычно концентрируем своё внимание на гребнях или впадинах как наиболее заметных. Далее мы будем рассматривать наборы волн одной и той же, не важно какой именно, фазы. Разумеется, в частном случае распространения волн в плоскости (например, волн на поверхности воды) последние изображаются не сферами, а окружностями.

Центр любой из волн (то есть сферы или окружности) мы выбираем в качестве начала системы отсчёта, которую будем условно называть неподвижной или связанной со средой распространения. Среду распространения будем называть здесь, исключительно для краткости, эфиром без каких либо предположений о его природе (жидкость, газ, вакуум или что-то иное). Нас здесь интересует лишь общая кинематическая схема движения волн. Если не оговаривается особо, движение и покой рассматриваются относительно эфира.

Обратим внимание, волны и их источник движутся независимо друг от друга в том смысле, что скорость волны не зависит от скорости её источника. Иначе говоря, волна распространяется с некоторой скоростью относительно точки, в которой находился её источник в момент порождения, независимо от его скорости и характера движения. Вместе с тем, общая картина волн зависит от того, движется источник, или нет.

При неподвижном источнике все сферы имеют единый центр в месте расположения источника (сферы концентричны). Если источник движется, то каждая сфера имеет свой центр, в котором находился источник в момент возникновения данной волны (сферы эксцентричны). Таким образом, мы можем судить о движении или покое источника, по крайней мере теоретически, по общей картине относительного расположения волн. Поскольку волна представляет собой сферу увеличивающегося радиуса, то её движение (расширение) абсолютно.

Теперь уточним картину движения волн. Их источник характеризуется временным периодом колебаний T (или частотой $f = 1/T$) и скоростью движения V , которую будем считать постоянной по величине и направлению. Набор волн характеризуется длиной волны λ и скоростью движения C , которая постоянна и в каждой точке волны направлена по нормали к её поверхности. Скорости как векторные величины будем обозначать прописными буквами, а их модули (длины векторов, абсолютные значения) — соответствующими строчными буквами; операцию взятия модуля изобразим с помощью прямых скобок, так что $v = |V|$ и $c = |C|$.

Если источник покоится, то все волны имеют единый центр, а разность радиусов любых двух соседних волн есть длина волны λ . Другими словами, в рассматриваемом случае длина волны является минимальным расстоянием между соседними волнами, при этом выполняется равенство $\lambda = cT$ — длина волны есть расстояние, на которое она перемещается за один период колебаний источника. В следующем разделе будет дано более общее определение волны.

2. Источник движется, а наблюдатель покоится

Если источник движется, то волны, как уже отмечалось, эксцентричны, и определение их длины не столь очевидно, как в случае покоящегося источника, поскольку длина волны зависит от точки, где она определяется неподвижным относительно эфира наблюдателем.

Длину волны в некоторой её точке определим как минимальное расстояние между этой точкой и такой точкой на ближайшей следующей по времени волне, в которой её вектор скорости параллелен вектору скорости в первой точке и направлен в ту же сторону.

Напомним, в каждой точке вектор скорости волны C направлен по нормали к волновой поверхности. Нетрудно заметить, что определение длины волны для неподвижного источника является частным случаем определения для движущегося источника.

На рис. 1 показаны две волны с центрами O_1 и O_2 , в которых находился источник в моменты возникновения этих волн. В точке O_3 находится источник в момент, когда сформировалась изображённая на рисунке ситуация: первая волна уже успела распространиться от места своего возникновения O_1 на расстояние 2λ , вторая — от O_2 на расстояние λ , а третья волна от источника O_3 возникла, но ещё не отделилась (не распространилась) от него. Расстояния между указанными положениями источника равны его перемещению со скоростью v за период колебаний T , то есть

$$O_1O_2 = O_2O_3 = vT = v\lambda/c = \beta\lambda,$$

где $\beta = v/c \leq 1$ — отношение скорости источника к скорости волны, случай $\beta > 1$ будет рассмотрен отдельно в разделе 6;

λ , T — соответственно длина волны и период колебаний покоящегося источника (собственные длина волны и период).

Точка H — место наблюдения, для которого определяется длина волны $\lambda' = HN$, согласно нашему определению. Отрезки прямых HO_1 и NO_2 параллельны, а их длины (радиусы волн) здесь равны соответственно 2λ и λ .

Нас интересует зависимость длины волны, принимаемой наблюдателем, от угла зрения, поскольку картина волн, изображённая на рис. 1, не симметрична. Иначе говоря, нас интересует зависимость λ' от φ — угла между векторами скорости движения источника V и волны C в точке наблюдения H , отсчитываемого от V к C .

Длина волны λ' в точке H определяется из треугольника MHN (рис. 1) по теореме косинусов:

$$\lambda' = \sqrt{\lambda^2 - 2\beta\lambda^2 \cos \varphi + \beta^2\lambda^2} = \lambda\sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi + \beta^2}, \quad (2.1)$$

или в общем виде:

$$\lambda' = |C - V|T. \quad (2.1')$$

Период T' колебаний, воспринимаемый в точке наблюдения:

$$T' = \lambda'/c = T\sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi + \beta^2}. \quad (2.2)$$

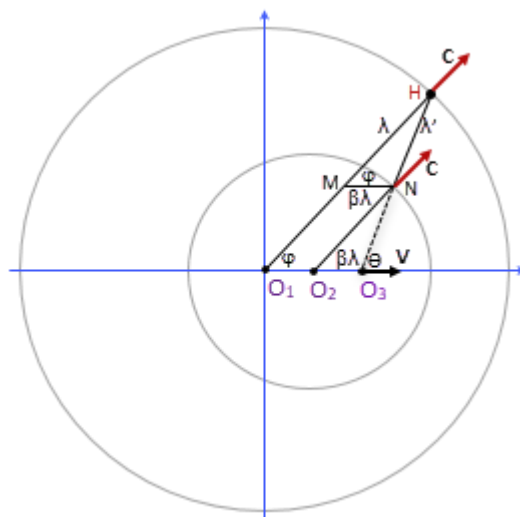


Рис. 1 Источник O_3 движется, наблюдатель H покоится

Возможны и другие выражения для λ' и T' , получающиеся, если в их основу положить иной угол. Когда вы обращаетесь к справочникам или статьям, в которых находите аналогичные, но всё же чем-то отличающиеся формулы в полярной системе координат, обратите внимание на определение входящих в них углов. Так, в приведённых выше формулах φ — угол между вектором V и вектором C в точке наблюдения. Мы могли бы называть φ углом видимости наблюдателя из центра принимаемой им волны. Однако с практической точки зрения более удобным, возможно, является угол между линией (направлением) HO_1 наблюдения центра O_1 принимаемой волны и направлением V движения источника в точке наблюдения H , который естественно назвать углом видимости центра принимаемой волны из точки наблюдателя (рис. 2). Последний, очевидно, равен $\varphi' = 180^\circ - \varphi$. Тогда формулы для λ' и T' (2.1 и 2.2, соответственно) примут вид:



Рис.2 Углы наблюдения

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 + 2\beta \cos \varphi' + \beta^2}, \quad T' = T \sqrt{1 + 2\beta \cos \varphi' + \beta^2}$$

Обратите внимание на изменение знака перед членом с косинусом: другой угол — другая, хотя и похожая, формула. Таким образом, говоря просто об угле видимости, следует понимать, что и откуда наблюдается. Данное замечание важно учитывать во избежание недоразумений при сравнении формул из различных источников.

Теперь рассмотрим несколько важных частных случаев:

1. Если источник покоится ($v = 0$, $\beta = 0$), то $\lambda' = \lambda$ и $T' = T$ — эффект Доплера отсутствует.
2. Если $\varphi = 0$, то есть источник движется в ту же сторону, что и волна в точке наблюдения (источник приближается к наблюдателю), то

$$\lambda' = \lambda(1 - \beta),$$

$$T' = T(1 - \beta).$$
3. Если $\varphi = 180^\circ$, то есть источник и волна в точке наблюдения движутся в противоположные стороны (источник удаляется от наблюдателя), то

$$\lambda' = \lambda(1 + \beta),$$

$$T' = T(1 + \beta).$$
4. Если $\varphi = \pm 90^\circ$ (так называемый поперечный эффект Доплера), то

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 + \beta^2},$$

$$T' = T \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Вернёмся к определению наблюдаемой длины волны. Кроме нашего определения, приведённого в начале раздела, существуют и другие. Так, О.Е. Акимов [1], предложил определять наблюдаемую длину волны как отрезок между точкой наблюдения H и точкой на ближайшей следующей волне, которая лежит на прямой HO_3 , соединяющей наблюдателя и источник (рис. 1). Нетрудно доказать, что это определение эквивалентно нашему. В формуле, предложенной Акимовым, используется угол Θ , измеренный в месте источника O_3 между направлением к наблюдателю и направлением движения источника.

Из треугольника MHN на рис.1, используя теорему синусов, О.Е. Акимов вывел следующую формулу для наблюдаемой длины волны:

$$\lambda' = \lambda(\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \Theta} - \beta \cos \Theta). \quad (2.4)$$

При этом связь между углами Θ и φ по теореме синусов выражается следующим образом:

$$\sin(\pi - \theta) / \lambda = \sin \varphi / \lambda' = \sin(\theta - \varphi) / \beta \lambda,$$

откуда получаем формулу для разности $\theta - \varphi$:

$$\sin(\theta - \varphi) = \beta \sin(\theta).$$

Как видно, синус разности углов θ и φ не превосходит по абсолютной величине отношения скоростей β , и чем меньше скорость, тем ближе друг к другу θ и φ . В частности, при $\theta = 90^\circ$

$$\cos \varphi = \beta,$$

и при $\beta \rightarrow 0$ $\varphi \rightarrow 90^\circ$.

Угол, между направлением на источник и направлением его движения, измеренный в точке наблюдения, $\theta' = 180^\circ - \theta$ можно назвать углом видимости источника; формула для λ' , выраженная через θ' , имеет вид:

$$\lambda' = \lambda (\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta'} + \beta \cos \theta'). \quad (2.5)$$

Если пользоваться формулой (2.4) или (2.5), то естественно считать, что поперечный эффект Доплера возникает при $\theta = \theta' = 90^\circ$:

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 - \beta^2},$$

то есть при поперечном эффекте возникает фиолетовое смещение длины волны, а не красное — $\lambda' = \lambda \sqrt{1 + \beta^2}$ при $\varphi = \varphi' = 90^\circ$. Данное обстоятельство вызвало резкую негативную критику Н.В. Купряева [2], сторонника релятивизма, при котором поперечный эффект — красное смещение.

Купряев считает, что воспринимаемую длину волны следует вычислять под углом φ' видимости центра этой волны, поскольку именно центр приходящей волны наблюдатель воспринимает как изображение источника, в то время как реальное положение источника может быть каким угодно. На больших расстояниях реальный источник не виден наблюдателю, а видно только его изображение, принесённое волной, в том месте, в котором реальный источник находился когда-то ранее. Так, наблюдаемые на небе даже ближайшие звёзды были там несколько лет тому назад. Хороший аргумент. Однако далее Купряев полагает, что наблюдаемую длину волны следует рассчитывать как расстояние до следующей ближайшей волны в направлении из точки наблюдения на её центр — на рис. 1 это направление NO_2 . Но тогда векторы скорости волны (или нормали) в точке наблюдения и в точке на второй волне оказываются, вообще говоря, не параллельными. Кроме того, длина волны, вычисленная таким способом, оказывается зависящей от удалённости наблюдателя от центра волны и, в частности, с увеличением расстояния поперечный эффект Доплера уменьшается, в пределе исчезая совсем (в рамках классической теории). А это плохие, на наш взгляд, следствия подхода Купряева.

В соответствии с нашим определением эффект Доплера зависит только от отношения $\beta = v/c$ и угла φ , и не зависит от удалённости наблюдателя от центра воспринимаемой волны и источника. Так например, формулу (2.1) можно вывести и для наблюдателя в точке N, совсем рядом с источником, из рассмотрения треугольника O_2NO_3 , в котором $NO_2 = \lambda$, $NO_3 = \lambda'$. Здесь первая волна имеет радиус $NO_2 = \lambda$, а вторая волна уже возникла в месте расположения источника O_3 , но пока ещё имеет нулевой радиус, а потому вектор её скорости направлен в любую сторону, в том числе и параллельно вектору скорости первой волны в точке наблюдения N. Следовательно, мы можем воспользоваться нашим общим определением длины волны, которое в данном случае даёт $NO_3 = \lambda'$.

3. Наблюдатель движется, а источник покоится

Теперь рассмотрим ситуацию, когда источник волн покоится относительно эфира, а наблюдатель движется равномерно и прямолинейно со скоростью V . В этом случае набор волн представляется концентрическими сферами (или окружностями), общий центр которых находится в месте положения источника. Наблюдаемая длина $\lambda' = \lambda$, то есть эффект Доплера для длины волны отсутствует. Действительно, длина волны есть расстояние, которое в классической физике является абсолютной величиной, не зависящей от системы отсчёта и движения наблюдателя.

Тем не менее, многие авторы пытаются объяснить, каким образом подвижному наблюдателю *кажется*, что длина воспринимаемой им волны может отличаться от длины той же волны, измеряемой в той же точке покоящимся наблюдателем (например, [1]). Другое дело — период или частота колебаний.

Для движущегося наблюдателя волна распространяется со скоростью $C - V$, и расстояние, равное λ , волна пройдет за некоторое время T' , так что выполняется равенство:

$$\lambda = |C - V| T', \quad (3.1)$$

откуда следует

$$T' = \lambda / |C - V| = T / \sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi + \beta^2}. \quad (3.2)$$

Таким образом, эффект Доплера для периода и частоты колебаний существует.

Вот несколько важных частных случаев:

1. Если наблюдатель покоится ($v = 0$, $\beta = 0$), то $\lambda' = \lambda$ и $T' = T$ — эффект Доплера отсутствует.
2. Если $\varphi = 0$, то есть наблюдатель движется в ту же сторону, что и волна в точке наблюдения (наблюдатель удаляется от источника), то

$$\lambda' = \lambda,$$

$$T' = T / (1 - \beta).$$
3. Если $\varphi = 180^\circ$, то есть наблюдатель и волна в точке наблюдения движутся в противоположные стороны (наблюдатель приближается к источнику), то

$$\lambda' = \lambda,$$

$$T' = T / (1 + \beta).$$
4. Если $\varphi = \pm 90^\circ$ (так называемый поперечный эффект Доплера), то

$$\lambda' = \lambda,$$

$$T' = T / \sqrt{1 + \beta^2}.$$

Заметим, что если допустить, как это делают некоторые авторы, изменение кажущейся длины волны в соответствии с формулой $\lambda' = c/T'$, то получится, что скорость волны одинакова в любой инерциальной системе отсчёта. Это соответствует конвенции релятивистов применительно к свету и электромагнитным волнам, но не классической теории.

Представим себя пассажиром равномерно движущегося поезда с закрытыми окнами. Мы слышим равномерный стук колёс на стыках рельсов. Вдруг частота стуков изменилась. Что произошло? Изменилась скорость поезда или длина рельсов между стыками? Если данная аллегория относится к свету, то для релятивистов изменилось межстыковое расстояние, а с классической точки зрения — скорость поезда.

4. Движутся оба — источник и наблюдатель

Эффект Доплера при движении источника и покое наблюдателя обусловлен смещением центров волн при постоянстве скорости C самих волн относительно наблюдателя, а при покое источника и движении наблюдателя — изменением скорости $C - V$ волн относительно наблюдателя. Обратите внимание на различие формул эффекта Доплера для этих двух схем движения и покоя источника колебаний и наблюдателя (приёмника). Для удобства сравнения перепишем формулы (2.1), (2.2), (3.1) и (3.2), снабдив входящие в них величины индексами: 1 — для случая, когда движется только источник, и 2 — для случая, когда движется только наблюдатель. Тогда формулы в компактной векторной форме примут вид:

$$\lambda_1' = |C - V_1|T, \quad \lambda_2' = \lambda, \quad (4.1)$$

$$T_1' = |C - V_1|T / |C|, \quad T_2' = \lambda / |C - V_2|. \quad (4.2)$$

Эти же равенства в развёрнутой форме с использованием абсолютных величин скоростей имеют вид:

$$\lambda_1' = \lambda \sqrt{1 - 2\beta_1 \cos \varphi_1 + \beta_1^2}, \quad \lambda_2' = \lambda,$$

$$T_1' = T \sqrt{1 - 2\beta_1 \cos \varphi_1 + \beta_1^2}, \quad T_2' = T / \sqrt{1 - 2\beta_2 \cos \varphi_2 + \beta_2^2}.$$

При этом $\lambda_1' / T_1' = |C|$, $\lambda_2' / T_2' = |C - V_2|$.

Теперь объединим рассмотренные две схемы движения, чтобы получить общие формулы для λ' и T' в предположении, что движутся одновременно оба — источник и наблюдатель. Это можно сделать методом суперпозиции, подставив в правые части выражений с индексом 2 вместо λ и T правые части равенств с индексом 1:

$$\lambda' = |C - V_1|T = \lambda \sqrt{1 - 2\beta_1 \cos \varphi_1 + \beta_1^2}, \quad (4.3)$$

$$T' = |C - V_1|T / |C - V_2| = T \sqrt{1 - 2\beta_1 \cos \varphi_1 + \beta_1^2} / \sqrt{1 - 2\beta_2 \cos \varphi_2 + \beta_2^2}. \quad (4.4)$$

Если скорости источника и наблюдателя одинаковы по величине и направлению относительно эфира ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$, $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$), то

$$\lambda' = \lambda \sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi + \beta^2}, \quad T' = T.$$

Иначе говоря, в данном случае эффект Доплера для периода (или частоты) отсутствует из-за взаимной компенсации эффектов от движения источника и движения наблюдателя. Таким образом, если наблюдатель неподвижен относительно движущегося источника, он не заметит смещения частоты или периода распространяющихся колебаний. При этом волны не концентричны, поскольку источник движется относительно эфира — эффект Доплера для длины волны есть. Однако практическое его прямое обнаружение, то есть не связанное с измерением времени, кажется проблематическим. Под прямым измерением длины следует понимать применение эталонов длины (линеек), а под косвенным — измерителей времени (часов) при известной скорости.

5. Сравнение формул

В учебной, справочной и научной литературе можно встретить формулы, несколько отличающиеся от приведённых в настоящей статье. Причины заключаются в определении углов и упрощении, основанном на следующих приближённых равенствах при $x \ll 1$ с точностью до величин порядка x^2 (второго порядка малости):

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \quad \frac{1}{1+x} \approx 1 - x + x^2, \quad \frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2. \quad (5.1)$$

Применяя указанные преобразования к приведённым выше формулам в предположении малой относительной скорости источника ($\beta \ll 1$) и пренебрегая величиной второго порядка малости β^2 , можно получить различные варианты упрощённых формул:

$$T_1' \approx T(1 - \beta \cos \varphi) \approx T/(1 + \beta \cos \varphi),$$

$$T_2' \approx T/(1 - \beta \cos \varphi) \approx T(1 + \beta \cos \varphi).$$

Если в упрощённых формулах положить $\varphi = 90^\circ$, то поперечный эффект Доплера исчезнет: $\lambda' = \lambda$, $T' = T$. Это обстоятельство и послужило широкому распространению мнения, что классическая теория, в отличие от релятивистской, неверно считает поперечный эффект Доплера отсутствующим. Как мы только что выяснили, поперечный эффект был утрачен классической теорией из-за её упрощения, что, может быть оправдано при решении многих практических задач (когда $\beta \ll 1$), но недопустимо с принципиальной точки зрения.

Теперь сравним формулу для случая, когда движется только источник, с формулой для случая, когда движется только наблюдатель, при условии, что $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Если мы не знаем априори, что именно движется, то рискуем применить не ту формулу, какую следовало бы. При сравнении формул необходимо учесть различие в понимании углов. Как уже отмечалось, $\varphi_i, i = 1, 2$ — угол между векторами скоростей V_i и C . Однако при острых и прямых углах в первой схеме источник приближается к неподвижному наблюдателю, а во второй схеме наблюдатель удаляется от неподвижного источника. Сравнение двух схем корректно, если в них обеих источник и наблюдатель либо сближаются, либо удаляются друг от друга. Рассмотрим, например, ситуацию, в которой в обеих схемах источник и наблюдатель сближаются, для чего положим $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi + 180^\circ$. Тогда сравниваемые формулы для периода колебаний примут вид:

$$T_1' = T\sqrt{1 - 2\beta \cos \varphi + \beta^2}, \quad T_2' = T/\sqrt{1 + 2\beta \cos \varphi + \beta^2}. \quad (5.2)$$

При $\beta \ll 1$ и пренебрежении величиной второго порядка малости β^2 , используя преобразования (5.1), данные формулы можно упростить:

$$T_1' \approx T(1 - \beta \cos \varphi), \quad T_2' \approx T/(1 + \beta \cos \varphi) \approx T(1 - \beta \cos \varphi).$$

Как видно, при сильном упрощении приближённые формулы становятся одинаковыми и, следовательно, при малых скоростях эффект Доплера не зависит от того, что именно движется, источник или наблюдатель.

Тем не менее, интересно оценить погрешность из-за применения формулы, не соответствующей истинной схеме. Сделаем это для случая $\varphi = 0$, когда источник и наблюдатель сближаются, и применяя не столь сильное упрощение. Тогда

$$T_1' \approx T(1 - \beta), \quad T_2' \approx T/(1 + \beta),$$

$\delta T' = T_1' - T_2' = -T \beta^2 / (1 + \beta)$ — абсолютная ошибка из-за применения неверной формулы;

доплеровские смещения периода для разных схем:

$$\Delta T_1 = T_1' - T = -T \beta, \quad \Delta T_2 = T_2' - T = -T \beta / (1 + \beta).$$

Относительные погрешности из-за применения неверной формулы:

$$\delta T' / \Delta T_1 = \beta / (1 + \beta) \approx \beta, \quad \delta T' / \Delta T_2 = \beta.$$

Так например, при определении радаром доплеровским методом скорости автомобиля 100 км/ч относительная погрешность из-за неверно выбранной формулы расчёта составит 10^{-7} , что приведет к ошибке измерения скорости приблизительно 1 см/ч. При скорости космического аппарата 10 км/с относительная погрешность составит $3 \cdot 10^{-5}$, а погрешность измерения скорости будет уже заметной — 0,3 м/с. Если $v = c$ ($\beta = 1$), то результаты применения различных формул будут существенно отличаться: $T_1' = 0$ ($f_1' = \infty$), $T_2' = T/2$ ($f_2' = 2f$).

Теперь рассмотрим точные формулы (5.2) для периода колебаний при $\varphi = 0$ и сближении источника и наблюдателя.

$$T_1' = T(1 - \beta), \quad T_2' = T/(1 + \beta).$$

Видно, что эти формулы отличаются друг от друга. Добавим к ним множитель k и определим его значение, при котором $T_1' = T_2'$:

$$T(1 - \beta)/k = kT/(1 + \beta),$$

откуда

$$k = \sqrt{1 - \beta^2}.$$

С учётом полученного значения k формулы для периодов примут вид:

$$T_1' = T(1 - \beta) / \sqrt{1 - \beta^2} = T \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}, \quad T_2' = T \sqrt{1 - \beta^2} / (1 + \beta) = T \sqrt{(1 - \beta)/(1 + \beta)}.$$

Последние формулы признаны релятивистами (сторонниками теории относительности Эйнштейна). Для них не важно, что именно движется, источник или наблюдатель, результат должен быть одинаков. Введение коэффициента k выглядит довольно искусственным и оправдывается релятивистами релятивистским замедлением времени — увеличением собственного периода колебаний движущегося источника. Далее мы обратимся к релятивистским формулам ещё раз.

В справочнике по физике Яворского и др. [3] приводятся формулы эффекта Доплера отдельно для акустики и оптики (электромагнитных волн). Первая формула — классическая, а вторая — релятивистская. Сначала сравним наши формулы с классической формулой из справочника, которая здесь приведена с точностью до обозначений входящих в неё величин:

$$f' = f(1 + \beta_2 \cos(\theta_2)) / (1 + \beta_1 \cos(\theta_1)), \quad (5.3)$$

где f' и f — наблюдаемая частота и собственная частота неподвижного источника;

θ_1 и θ_2 — углы, образуемые векторами скоростей V_1 источника и V_2 наблюдателя (приёмника) с вектором, соединяющим приёмник с источником волн.

Для сравнения выберем формулу (4.4) для периода колебаний T' , предварительно преобразовав её к виду для частоты $f' = 1/T'$ и изменив углы, так чтобы сравнение было корректным. В формуле (4.4) φ_i , $i=1, 2$ — углы между векторами скоростей V_i и C , а не между V_i и вектором, соединяющим приёмник с источником волн, как в формуле (5.3) из справочника. Поэтому мы заменим в (4.4) φ_i

на $\varphi_i = 180^\circ - \theta_i$, то есть на угол между скоростью V_i и вектором, соединяющим приёмник с центром волны. Как известно, при малых скоростях V_i указанный угол близок к углу между V_i и направлением на источник. Затем применим преобразования (5.1), пренебрегая величинами второго порядка малости:

$$\begin{aligned} f' &= f \sqrt{1 + 2\beta_2 \cos \theta_2 + \beta_2^2} / \sqrt{1 + 2\beta_1 \cos \theta_1 + \beta_1^2} \approx \\ &\approx f(1 + \beta_2 \cos \theta_2 + \beta_2^2/2) / (1 + \beta_1 \cos \theta_1 + \beta_1^2/2) \approx \\ &\approx f(1 + \beta_2 \cos \theta_2) / (1 + \beta_1 \cos \theta_1). \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, в результате преобразований мы получили формулу из справочника. Итак, мы показали, что формула (5.3) из справочника является упрощением точной, на наш взгляд, формулы (4.4).

Можно предположить, что (5.3) изначально была сконструирована как приближительная с помощью упрощённой процедуры обобщения формулы для простой ситуации, в которой вектора S и V_i направлены вдоль одной и той же прямой, проходящей через источник волн и наблюдателя. При этом углы в формулах равны либо 0 , либо 180° . Именно для этой ситуации К. Доплер и вывел свои простые формулы. Заметим также, что в данном простом случае скорости V_i ($i = 1, 2$) источника волн и наблюдателя можно рассматривать как радиальные скорости, то есть скорости изменения расстояния между ними. Отсюда напрашивается следующее упрощённое обобщение на случай, когда векторы V_i составляют некоторые произвольные углы с радиусом-вектором источника из точки наблюдения: надо вместо V_i взять их проекции на радиус-вектор, которые вычисляются посредством косинусов указанных углов. Таким образом, в формулы для эффекта Доплера вводятся радиальные составляющие полных скоростей и отбрасываются их трансверсальные составляющие.

Формулу (5.3) из справочника можно ещё более обобщить методом упрощения так, чтобы в ней присутствовала относительная скорость источника и приёмника:

$$\begin{aligned} f' &= f(1 + \beta_2 \cos \theta_2) / (1 + \beta_1 \cos \theta_1) \approx f(1 + \beta_2 \cos \theta_2)(1 - \beta_1 \cos \theta_1) \approx \\ &\approx f(1 - \beta_1 \cos \theta_1 + \beta_2 \cos \theta_2 - \beta_1 \beta_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2) \approx \\ &\approx f(1 - \beta_1 \cos \theta_1 + \beta_2 \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Здесь $\beta_1 \cos \theta_1 - \beta_2 \cos \theta_2$ — разность проекций векторов V_1/c и V_2/c на радиус-вектор R , соединяющий приёмник с источником волн, равна проекции вектора относительной скорости $(V_1 - V_2)/c$ на радиус-вектор R (см. рис. 3). Введя обозначения

$$\beta = |V_1 - V_2|/c,$$

θ — угол между вектором $V = V_1 - V_2$ и радиусом-вектором R ,

получим следующую формулу:

$$f' \approx f(1 - \beta \cos \theta) \approx f/(1 + \beta \cos \theta). \quad (5.4)$$

Формулу (5.4) можно получить аналогичным способом и из точной формулы (4.4). Заметим, что в (5.3) поперечный эффект при $\theta = \pm 90^\circ$ незаметен, но зато в ней фигурирует относительная радиальная скорость $V = V_1 - V_2$, так что пользователям этой формулы не важно знать, что именно движется, источник волн или наблюдатель,

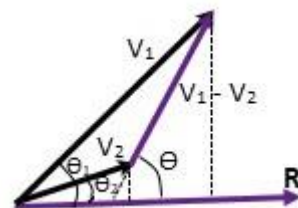


Рис. 3 Разность проекций векторов V_1 и V_2 на радиус-вектор R равна проекции вектора относительной скорости $V_1 - V_2$ на вектор R

Формула эффекта Доплера для частоты электромагнитных волн (света), указанная в справочнике по физике Яворского и др., с точностью до обозначений выглядит так:

$$f' = f \sqrt{1 - \beta^2} / (1 + \beta \cos \theta). \quad (5.5)$$

Формула (5.5) получена из (5.4) добавлением корня $\sqrt{1 - \beta^2}$ в числителе, который отражает замедление времени (уменьшение частоты) колебаний в специальной теории относительности. При $\theta = \pm 90^\circ$ формула (5.5) дает $f' = f \sqrt{1 - \beta^2}$ — красное смещение частоты, что специальная теория относительности ставит себе в особую заслугу. Однако, как мы уже видели, это несправедливо по отношению к классической теории.

6. Очень большая скорость ($\beta \geq 1$)

В предыдущих разделах рассматривались формулы эффекта Доплера в предположении, что скорости v_1, v_2 движения соответственно источника колебаний и наблюдателя не превосходят скорости c волн ($\beta_i = v_i/c \leq 1$). Однако точные классические формулы для λ' и T' (или $f' = 1/T'$), в отличие от упрощённых и релятивистских, допускают и случай $\beta_i > 1$, поскольку входящие в них подкоренные выражения

$$1 \pm 2\beta_i \cos \varphi_i + \beta_i^2$$

при любых $\beta_i \geq 0$ и углах φ_i неотрицательны. На рис. 4 показана структура волн от источника, движущегося со скоростью, равной или большей скорости самих волн.

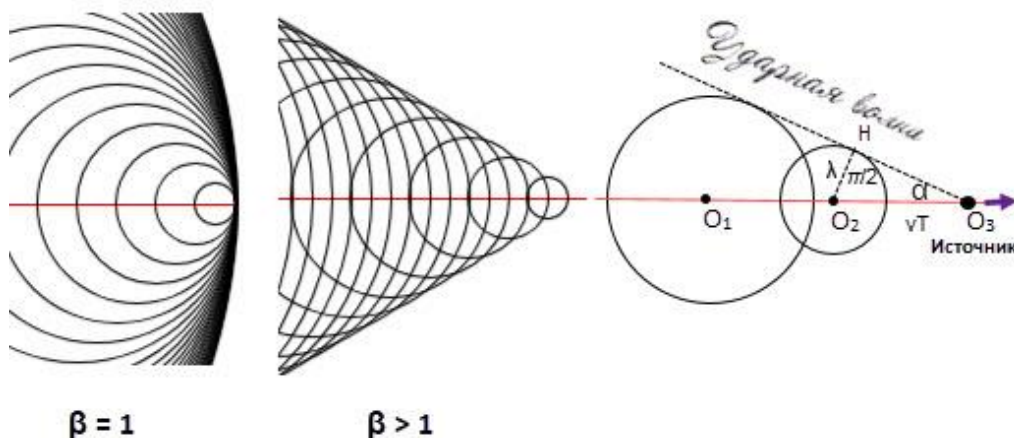


Рис. 4 Источник движется со скоростью, равной или большей скорости распространения волн

В любой момент времени через текущее положение источника можно провести касательную ко всем круговым волнам, которую называют ударной волной. Это плоская картина, а сферические волны заключены внутри кругового конуса, в вершине которого находится источник. Угол α наклона касательной (образующей конуса) к направлению движения источника вычисляется из треугольника O_2HO_3 . В этом треугольнике текущее положение источника O_3 отстоит, спустя время T , от предыдущего положения O_2 на расстояние vT . В этот момент волна из центра O_2 распространилась на расстояние, равное собственной длине волны λ источника. Таким образом, выполняются следующие равенства:

$$\lambda/vT = cT/vT = 1/\beta = \sin \alpha.$$

Формулу $\sin \alpha = 1/\beta$ получил Э.Мах при исследовании распространения сверхзвуковых волн. Эффект, аналогичный ударной волне в акустике, возникает при движении заряженных частиц — излучение Вавилова – Черенкова.

Длина волны λ' , наблюдаемая в точке Н на линии (поверхности конуса) ударной волны, вычисляется в соответствии с определением, данным в начале раздела 3. В данном случае это расстояние НО₃:

$$\lambda' = vT \cos \alpha = vT \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = vT \sqrt{1 - 1/\beta^2} = cT \sqrt{\beta^2 - 1} = \lambda \sqrt{\beta^2 - 1}.$$

Эта же формула может быть получена непосредственно из (2.1) подстановкой $\varphi = 90^\circ - \alpha$.

Наблюдатель может принимать волны, если он находится внутри или на поверхности конуса. Хотя при этом источник волн будет всегда удаляться от него, наблюдаемая длина волны зависит от того, какие волны принимаются — идущие вслед за источником, или в противоположную сторону. Для первых угол между векторами С и V острый, а для вторых — тупой.

Литература

1. Акимов О.Е. Естествознание. Курс лекций, — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001.
<http://sceptic-ratio.narod.ru/fi/es4.htm>
<http://vekordija.narod.ru/R-OAKL-2.PDF>
2. Купряев Н.В. Критические замечания по учебнику О.Е. Акимова “Естествознание. Курс лекций”, 2004.
<http://sciteclibrary.ru/rus/catalog/pages/6899.html>
3. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов, — М.: Наука, 1971.
 Яворский Б.М., Детлаф А.А., Лебедев А.К. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов,— М.: Оникс, 2006.
<http://www.booksshare.net/index.php?id1=4&category=physics&author=yavorskiy-bm&book=20061>
4. Победоносцев Л.А., Крамаровский Я.М., Паршин П.Ф. и др. Экспериментальное определение доплеровского смещения линий водорода на пучках ионов Н₂⁺ в диапазоне энергий 150-2000 кэВ. Журнал технической физики, т.59, вып.3, 1989.
<http://ritz-btr.narod.ru/pobedonoscev.html>
5. У.И. Франкфурт У.И., Френк А.М. Оптика движущихся тел (М.: Наука, 1972, - фрагменты из книги).
<http://ritz-btr.narod.ru/frankfurt/frankfurt.html>
6. Анимационная иллюстрация эффекта Доплера.
<http://dunaevv1.narod.ru/other/dopler.htm>